УДК 51-3
DOI 10.33514/BK-1694-7711-2019-1-137-142

Ажигулов М. Т.[1], Абдыракманова А. А.[2], Акмолдоев Э. Ш.[2]
[1]физика-математика илимдеринин кандидаты, Ж. Баласагын атындагы КУУнун колдонмо математика, информатика жана компьютердик технологиялар кафедрасынын доценти, Кыргызстан
[2] Ж. Баласагын атындагы КУУнун математика жана информатика факультетинин 2 – курсунун магистранты, Кыргызстан

Ажигулов М. Т.[1], Абдыракманова А. А.[2], Акмолдоев Э. Ш.[2]
[1]кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, информатики и компьютерных технологий КНУ им. Ж. Баласагына, Кыргызстан
[2]магистрант 2 курса факультета математики и информатики КНУ им. Ж. Баласагына, Кыргызстан

Ajigulov M. T. [1], Abdyrakhmanova A. A. [2], Akmoldoev E. S. [2]
[1]candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor of applied mathematics, Informatics and computer technologies of KNU. Zh. Balasagyna, Kyrgyzstan
[2]master's 2 courses of the faculty of mathematics and Informatics of KNU Zh. Balasagyna, Kyrgyzstan

ЧОҢ ТУУНДУСУНДА КИЧИНЕ ПАРАМЕТРИ БАР ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН СЫЗЫКТУУ ЭМЕС СИСТЕМАСЫНЫН АСИМПТОТИКАЛЫК ТЕОРИЯСЫ

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

ASYMPTOTIC THEORY OF NONLINEAR SYSTEMS OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A SMALL PARAMETER AT THE HIGHEST DERIVATIVE

Аннотация: Бул макала чоң туундусунда кичине параметри бар жекече туундулуу интегро-дифференциалдык теңдемелердин сызыктуу эмес системасынын асимптотикалык теориясы каралган. Интегро-дифференциалдык тендемелердин сызыктуу эмес системасынын чыгарылышы удаалаш жакындаштыруу ыкмасы менен алынган.

Аннотация: Данная статья об асимптотической теории нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с малым параметром при старшей производной. Решение системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений получено методом последовательных приближений.

Abstract: This article is about the asymptotic theory of nonlinear systems of integro-differential partial differential equations with a small parameter with the highest derivative. The solution of a system of nonlinear integro-differential equations is obtained by the method of successive approximations.

Ачкыч сөздөр: Интегро-дифференциалдык теңдемелердин сызыктуу эмес системасы, асимптотика, реккуренттик катыштар, четтик катмардын функциясы.

Ключевые слова: Нелинейные системы интегро-дифференциальных уравнений, асимптотика, реккуренттные соотношения, функция пограничного слоя.

Keywords: Nonlinear systems of integro-differential equations, asymptotics, recurrent relations, boundary layer function.

Рассматривается нелинейная система интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon\left(\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial U(t,x)}{\partial x}\right)+AU(t,x)=\lambda\int_0^1 К(t,s,U(s,x))\partial s \qquad (1)$$

с начальным условием $U(o,x)=\varphi(x),$ (2)

Где А – $n\times n$ – квадратная матрица, причем вещественной части алгебраического уравнения $\det(\lambda E-F)=0,$ удовлетворяют неравенствам $Reei\lambda i<-a(i=1,2,,,n),\lambda-$ {некоторый параметр, $\in>0-$ малый параметр б $К\big(t,s,u(s,x)\big)$ непрерывная n-мерная в области $G_0\{0\le t\le 1,-\infty<x<+\infty,-\infty<U_1,,,U_n\ <+\infty\}$

И имеет непрерывные производные по векторному аргументу U(t,x) и по скалярному аргументу t, $\varphi(x)-$ заданная n-мерная непрерывная векторная функция.

Полагая ε=0 в (1), получаем систему интегральных уравнений

$$А\partial(t,x)=\lambda\int_0^1 K\big(t,s,\partial(s,x)\big)d,s \qquad (3)$$

Предполагается, что интегральное уравнение (3) имеет некоторые непрерывные и ограниченные решения по t и x и ограниченные производные по этим аргументам.

Решение системы (1) - (2) будем искать в виде

$$U(t,x)=\varphi(t,x)+\pi\left(\frac{t}{a},x\right)+\varepsilon\epsilon(t,x,e), \qquad (4)$$

где $\pi\left(\frac{t}{a},x\right)$-пограничная функция, которую требуется определить, $\epsilon(t,x,e)-n-$ мерная неизвестная остаточная функция [3].

Подставляя (4) в исследуемое уравнение (1),

$$\varepsilon(\frac{\partial\pi(t,x)}{\partial t}+\frac{1}{\partial}\frac{\partial\pi(t,x)}{\partial\pi}+\varepsilon\frac{\partial\epsilon(t,x,e)}{\partial t}-\frac{\partial\vartheta(t,x)}{\partial x}-\frac{\partial\pi\left(\frac{t}{\epsilon},x\right)}{\partial x}-\varepsilon\frac{\partial E(t,x,e)}{\partial x})+$$

$$+А\vartheta(t,x)+A\pi(\frac{t}{\epsilon},x)+\varepsilon AE(t,x,\varepsilon)=\lambda\int_0^1 K\left(t,s,\vartheta(s,x)+\pi\left(\frac{s}{e},x\right)++\varepsilon\epsilon(s,x,\varepsilon)\right)ds \qquad (5)$$

Функция пограничного слоя $\pi(t,x)$определяем из уравнения $\frac{\partial\pi(t,x)}{\partial t}+A\pi(t,x)=0$ (6)

С начальным вектором $\pi(0,x)=\varphi(x)-\vartheta(0,x)$ (7)

Уравнение (6) с начальным условием (7) имеет следующее решение

$$\pi(t,x)=\sum_{k=1}^n Dk\frac{tk}{\varepsilon}\ {}^t(\varphi(x)-\vartheta(0,x)) \qquad (8)$$

Имеем,

$\left\|E_2(t_1x,\varepsilon)-E_1(t_1x_1\varepsilon)i\ 1\le\frac{|\lambda|}{\varepsilon^2}\int_0^t\left\|\iota\frac{A(t-s)}{\varepsilon}\right\|\int_0^t\left[\left\|K\left(s,v,\vartheta(x,+t-s)+\pi\left(\frac{V}{\varepsilon^1}x+t-s\right)-\varepsilon E_1(t_1x+t-s,\varepsilon)\right)-K(s,v,\vartheta(x,+t-s)+\pi\left(\frac{v}{\varepsilon^1}x+t-s\right)+\varepsilon E_1(t_1x+t-s,\varepsilon)\right\|\right]dvds\le\frac{|\lambda|}{\varepsilon^2}\int_0^t K_0\frac{-A(t-s)}{\varepsilon}\int_0^t\epsilon N\right\|E_1(v_1x+t-s,e)-E_1(v_1x+t-s,e)\left\|dvds\le\frac{NK_{0\lambda}}{\varepsilon}\int_0^t\iota\frac{-a(t-s)}{\varepsilon}\right\|$

$$0\int^1-\infty<a<+\infty MAX\|E_1(V_1x)-E_0(v_1x)\|dvds\le\frac{NK|\lambda|}{\varepsilon a}\|E_1(t,x)-E_0(t,x)\|$$

Таким образом, получили

$$\|E_2(t_1x,\varepsilon)-E_1(t_1x,e)\| \le \frac{NK|\lambda|}{a}\|E_1(t,x)-E_0(t,x)\|$$

Оцениваем функции пограничного слоя [2] . Пусть

$$\|a(x)-\vartheta(0,x)\| \le \beta_0 = const.$$

$$\sum_{k=1}^{n}\|D\ K_0\| = const.$$

Тогда из (8) вытекает, неравенство

$$\|\pi(\tau,x)\| = \|\pi(\tfrac{t}{\varepsilon},K)\| \le \sum^{n} k=1\ \|D_k\|e^t\left|e^{iBt\varepsilon}\right|.$$

$$\|\alpha(x)-\vartheta(o,x)\| \le K_0\,\beta_0 e^{\varepsilon}$$

Отсюда

$\|\pi(\tau,x)\| \le \acute{k}_0 e^{-t}.$ (9)

где, $\acute{k}_0 = k_0\beta_0 = const.$

Определим неизвестную n-мерную вектор-функцию из следующей системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений [4] .

$$\varepsilon^2\left(\frac{\partial\varepsilon(t,x,\varepsilon)}{\partial t}-\frac{\partial\varepsilon(t,x,\varepsilon)}{\partial x}\right)+\varepsilon\xi(t,x,\varepsilon)=\varepsilon\frac{\partial\pi(\frac{t}{\varepsilon}x)}{\partial x} - \varepsilon\left(\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial v(t,x)}{\partial x}\right) + \lambda\int_0^1 K\left(t,s,v(s,x)+\pi\left(\frac{s}{\varepsilon},x\right)+\varepsilon\xi(s,x,e)\right)dS-\lambda\int_0^t K\big(t,s,v(s,x)\big)ds.$$

Это выражение записываем в виде

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\xi(t,x,e)}{\partial t}-\frac{\partial\xi(t,x,e)}{\partial x}\right)+A\xi(t,x,e)=\frac{\partial\pi\left(\frac{t}{e}x\right)}{\partial x}-\left(\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial v(t,x)}{\partial x}\right)+$$

$$+\lambda\int_0^1\frac{1}{e}\left[K\left(t,s,v(s,x)+\pi\left(\frac{s}{e},x\right)+e\xi(s,x,e)\right)-k(t,s,v(s,x)+\pi(\tfrac{s}{e}))\right]ds+$$

$$\lambda\int_0^1\frac{1}{e}\left[k\left(t,s,v(s,x)+\pi\left(\frac{s}{e},x\right)\right)-k(t,s,v(s,x))\right]ds. \qquad (10)$$

Введем обозначение

$$\mathrm{F(t,x,e)} = \frac{\partial\pi(\frac{t}{e},x)}{\partial x}-$$

$$-\left(\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right)+\frac{\lambda}{e}\int_0^1\frac{1}{t}\left[k(t,s,x)+\pi\left(\frac{s}{e},x\right)-k(t,s,x)\right]ds. \qquad (11)$$

Тогда система уравнений (10) запишется в виде

$$\mathrm{e}\left(\frac{\partial\xi(t,x,e)}{\partial t}-\left(\frac{\partial\xi(t,x,e)}{\partial x}\right)\right)+\mathrm{A}\xi(\mathrm{t,x,e})=\frac{\lambda}{e}\int_0^1\frac{1}{e}\left[K\left(t,s,v(s,x)+\pi\left(\frac{s}{e}x\right)\right)+e\xi(s,x,e)-k(t,s,v(s,x)+\pi(\tfrac{s}{e}x))\right]ds+F(t,x,e). \quad (11)$$

Оцениваем функцию F(t,x,e). Так как $\|k(t,s,v,\pi)-k(t,s,v)\| \le N\|\pi\|$ где N=const, то из (11), вытекает

$$\|F(t,x,e)\| \le \left\|\frac{\partial\pi\left(\frac{t}{e}x\right)}{\partial t}-\left(\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{|\lambda|}{e}\int_0^1\left[k\left(t,s,v(s,x)+\pi\left(\frac{s}{e},x\right)\right)-k\big(t,s,v(s,x)\big)\right]ds\right\| \le$$

$$\leq \left\|\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}\right\| + \left\|\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right\| + \left\|\frac{\partial \pi(\frac{t}{e}x)}{\partial t}\right\| + \frac{|\lambda|}{e}\int_0^1 \left\|k\left(t,s,v(s,x)+\pi\left(\frac{s}{e},x\right)\right)-\right.$$

$$\left.k(t,s,v(s,x))\right\| ds \leq M + \left\|\frac{\partial \pi\left(\frac{t}{e}x\right)}{\partial x}\right\| + \frac{|\lambda|}{e}\int_0^1 N\left\|\pi(\frac{s}{e})\right\| ds \leq M + \frac{|\lambda|N}{e}\int_0^1 K_0 1^{-\frac{as}{e}} ds \leq M +$$

$$\frac{|\lambda|NK_0}{a}\left(1-e^{-\frac{a}{t}}\right) \leq M + \frac{|\lambda|NK_0}{a} + \left\|\frac{\partial \pi(\frac{t}{e}x)}{\partial x}\right. \text{, где } M = \left\|\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}\right\| + \left\|\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}\right\|\left\|\frac{\partial v(t,x)}{\partial x}\right\|. \qquad (12)$$

Учитывая (12), дифференцирую по x, получаем $\frac{\partial \pi(\frac{t}{e}x)}{\partial x} = \sum_k^n = 1\, Dke^{rkt/e}[\varphi'(x) - v'(0,x)]$.

Пусть $\|[\varphi'(x) - v'(0,x)]\| \leq M_{1=const}$

Тогда $\left\|\frac{\partial \pi(\frac{t}{e}x)}{\partial x}\right\| \leq K_0 M_1 e^{-dt/s}$

На основании (13) из неравенства (12) при e> 0 в области

$G\{0 \leq t \leq 1, -\infty < x < +\infty\}$, получаем $\|F(t,x,e)\| = C_0 = const$ *(14)*

Далее займемся исследованием функции $e(t,x,e)[1]$, вводя следующую замену в системе уравнений (11)

e(t,x,e)=$e^{-\frac{At}{e}} z(t,x,e)$. (15)

Так как e(0,x,e)=0 то Z(0,t,e)=0.

Имеем

$$\text{e}(-\frac{A}{e}1^{\frac{At}{e}}z(t,x,e) + e^{\frac{At}{e}}\frac{\partial Z(t,E,e)}{\partial t}) - e^{\frac{At}{e}}\frac{\partial Z(t,E,e)}{\partial x} + \text{A}e^{\frac{At}{e}}Z(t,x,e) = \frac{\lambda}{e}\int_0^1\left[K\left(t,s,\vartheta(s,x)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\pi\left(\frac{s}{e},x\right)+\varepsilon e^{\frac{At}{e}}Z(s,x,e)\right) - k(t,s,\vartheta(s,x)+\pi(\frac{s}{e},x))\right] ds + F(t,x,E).$$

Отсюда,

$$\frac{\partial Z(t,x,e)}{\partial t} - \frac{\partial Z(t,x,e)}{\partial x} = e^{\frac{At}{e}}F(t,x,E) + \frac{\lambda}{e}e^{\frac{At}{e}}\int_0^1\left[k\left(t,s,\vartheta(s,x)+4\pi\left(\frac{s}{e},x\right)+\varepsilon e^{\frac{At}{e}}Z(s,x,\xi)\right)-\right.$$

$$\left.k(t,s,\vartheta(s,x)+\pi(\frac{s}{e},x))\right] ds \qquad (16)$$

Из системы интегро-дифференциальных уравнений (16) приходим к нелинейному интегральному уравнению

$$\text{z(t,x,e)}=\int_0^t e^{\frac{At}{e}}F(t,x+t-s)ds + \int_0^t e^{\frac{At}{e}}\frac{\lambda}{e^2}\int_0^1\left[k\left(s,v,\vartheta(v,x+t-s)+\pi\left(\frac{v}{e},x+t-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.s\right)+\varepsilon e^{\frac{At}{e}}Z(v,x+t-s,e)\right)\right] dvds \qquad (17)$$

В равенстве (17), переходя обратно к переменной на основании (15),получаем

$$\xi\text{(t,x,e)}=\int_0^t e^{\frac{A(t-s)}{e}}F(s,x,+t-s)e)\text{ds}+\int_0^t e^{\frac{A(t-s)}{e}}\frac{\lambda}{e^2}\int_0^1[k\left(s,v,\vartheta(v,x+t-s)+\right.$$

$$\left.\pi\left(\frac{v}{e},x+t-s\right)+e\xi(v,x+t-s,e)\right) - k(s,v,\vartheta(v,x+t-s)+\pi(\frac{v}{3},x+t-s)))]dvds$$

(18)

Сначала оценим свободный член выражения (18).

Обозначим,

H(t,x,e)=$\int_0^t e^{\frac{A(t-s)}{e}}\frac{1}{e}F(s,x+t-s),e)ds$ (19)

Так, как функция

F$\big((s,x+t-s),\varepsilon\big)$равномерно ограничена для всех x

И удовлетворяет (14), кроме того, $\left\| e^{\frac{A(t-s)}{e}} \right\| \le K_0 l^{-\frac{a(t-s)}{\varepsilon}}$

При t$\ge s, a \ge 0 = const$, то из (19), получаем

$$\|H(t,x,\varepsilon)\| \le \int_0^t \left\| e^{\frac{A(t-s)}{\varepsilon}} \right\| * F(s,x+t-s,\varepsilon)ds \le C_0K_0 \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{a(t-s)}{\varepsilon}} \text{ds} \le$$

$$\le \frac{C_0K_0}{a}\left(1-e^{-\frac{at}{\varepsilon}}\right) \le \frac{C_0K_0}{a} = h_0 = const \qquad (20)$$

И так, получили

$$\|H(t,x,\varepsilon)\| \le h_0 = const \text{ в области } G$$

Таким образом, мы показали, что при $\varepsilon \to 0$ в области G

$0 \le t \le 1, -\infty < x < +\infty$ вектор − функция $H(t,x,\varepsilon)$ равномерно ограничена.

Систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (18) будем решать методом последовательных приближений, которые будут отделять из рекуррентного соотношения

$$\xi_n(t,x,\varepsilon) = H(t,x,\varepsilon) + \int_0^t e^{\frac{A(t-s)}{e}} \frac{\lambda}{\varepsilon^2} \int_0^t \Big[K(s,v,\vartheta(v,x,+t-s) + \pi\left(\frac{v}{\varepsilon^1}x+t-s\right) + \varepsilon\xi_{n-1}(v,x+t-s,\varepsilon) - K(s,v,\vartheta(v,x,+t-s) + \pi(\frac{v}{\varepsilon^1}x+t-s)\Big] dvds, (n = 1,2,3 \dots k) \qquad (21)$$

За нулевое приближение возьмем

$$\xi_0(t,x,\varepsilon) = 0 \qquad (22)$$

Имеем оценку

$$\|\xi_1(t,x,\varepsilon) - \xi_0(t,x,\varepsilon)\| \le \|H(t,x,\varepsilon)\| \le h_0 = const \qquad (23)$$

Второе приближение записываем в виде

$$\begin{aligned}\xi_2(t,x,\varepsilon) = \frac{\lambda}{\varepsilon^2}\int_0^t e^{\frac{A(t-s)}{\varepsilon}} \int_0^1 \Bigg[K\left(s,v,\vartheta(v,x,+t-s) + \pi\left(\frac{v}{\varepsilon^1}x+t-s\right)\right.\\ \left. + \varepsilon\xi_1(t,x,+t-s,\varepsilon)\right) - K(s,v,\vartheta(v,x,+t-s) + \pi\left(\frac{v}{\varepsilon^1}x+t-s\right)\\ + \varepsilon\xi_1(t,x,+t-s,\varepsilon)\Bigg]\\ - K\left(s,v,\vartheta(v,x,+t-s) + \pi\left(\frac{v}{\varepsilon^1}x+t-s\right) + \varepsilon\xi(t,x,+t-s,\varepsilon)\right))]dvds\\ + H(t,x,\varepsilon),\end{aligned}$$

Таким образом, показано, что все построенные приближения ограничены и разность последовательных приближений тоже ограничена. Из тождества

$$\xi_n(t,x,\varepsilon) = \xi_0(t,x,\varepsilon) + [\xi_1(t,x,\varepsilon) - \xi_0(t,x,\varepsilon)] + \dots + [\xi_n(t,x,\varepsilon) - \xi_{n-1}(t,x,\varepsilon)]$$

Имеем оценку

$$\|\xi_n(t,x,\varepsilon)\| \le \|\xi_1(t,x,\varepsilon) - \xi_0(t,x,\varepsilon)\| + \|\xi_2(t,x,\varepsilon) - \xi(t,x,\varepsilon)\| + \cdots + \|\xi_n(t,x,\varepsilon) - \xi_{n-1}(t,x,\varepsilon)\| \qquad (27)$$

Отсюда $\|\xi_n(t,x,\varepsilon)\| \le h_0\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) \le 2h_0 = const$

И так в области G$\{0 \le t \le 1, -\infty < x < +\infty\}$ при $\varepsilon < 0$ имеем $\|\xi_n(t,x,\varepsilon)\| \le 2h_0$, (28) и доказана следующая теорема.

Теорема: пусть 1) векторная функция $K(t,x,U(t,x))$ в области G_0 непрерывна и определена, и удовлетворяет условию Липшица по векторному аргументу $U(t,x)$

$$K\big(t,x,U_2(t,x)\big) - K\big(t,x,U_1(t,x)\big) \le N\|U_2(t,x) - U_1(t,x)\|, N = const;$$

2) $A - n \times n$ - квадратная постоянная матрица, вещественные части всех корней λ_t характерического уравнения det($\boldsymbol{\lambda}$E-A)=0 удовлетворяет неравенству

$$Reel\lambda_i < -\alpha < 0, \alpha > 0 = const;$$

3) $\frac{|\lambda| K_0 N}{\alpha} \leq \frac{1}{2}$, $K_0 -$ определяется следующим образом $\left\| e^{\frac{At}{\varepsilon}} \right\| \leq K_0 e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}}$.

Тогда система интегро-дифференциальных уравнений (1)-(2) имеет единственное непрерывное решение вида $U(t,x) = \Upsilon(t,x) + \Pi\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right) + \varepsilon\xi(t,x,\varepsilon)$,

где $\Upsilon(t,x)$ - решение системы нелинейных интегральных уравнений (3), при этом выполняются неравенства

$\left\| \Pi\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right) \right\| \leq K_0 e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}}$; $\|\xi(t,x,\varepsilon)\| \leq M = const$,

причем в области $G\{0 \leq t \leq 1, -\infty < x < +\infty\}$. Это решение при $\varepsilon \to 0$ стремится к решению вырожденного уравнения (3).

Список использованной литературы:

1. Иманалиев М.И. Асимптотические методы в теории сингулярно-возмущенных и.-д.у.—Фрунзе: Илим, 1972. 356 с.
2. Ажигулов М.Т. Некоторое исследование энергосистемы интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной // Интегро-дифференциальные уравнения и их приложения. - Фрунзе, 1979, вып.2.
3. Васильева А. Б. Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной //УМН. - 1963, Т. 18, вып.3.
4. Иманалиев М. И., Ажигулов М. Т. Асимптотическая теория некоторых классов интегро-дифференциальных систем с частными производными с малым параметром при старшей производной.//Бишкек: Университет, 2013, 22с.

Рецензент: д.ф-м.н., профессор Бийбосунов Б.И.