ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 681.3

Аблабекова Ч. А., Алтымышова Ж.А., Сыдыкова А. Ж., Токоев Т.
Н. Исанов а. КМАКТАУ, «Колдонмо математика жана информатика» кафедрасы

ДИФФЕРЕНЦИЯЛЫК ТЕНДЕМЕЛЕРДИ ЖАКЫНДАШТЫРЫП ЧЫГАРУУ МАСЕЛЕСИНИН ПРОГРАММАСЫН КОЛДОНУУ

Макалада сызыктуу четки дифференциалдык экинчи тартиптеги тендеме каралат жаны анын программасы С++ -тө түсүлөт.

Негизги сөздөр: *математикалык метод, чыгаруу, маселе, дифференциалдык тендеме*

Аблабекова Ч. А., Алтымышова Ж.А., Сыдыкова А. Ж., Токоев Т.
Кафедра «Прикладной математики и информатики», КГУСТА им. Н. Исанова

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В этой работе рассматривается решение линейных краевых задач дифференциального уравнения второго порядка и применение языка программирования С++ для решения данной задачи.

Ключевые слова: *математические методы, решение, проблема, дифференциальное уравнение*

Ch.Ablabekova, Zh. Altymysheva, A., Zh. Sydykova, T.Tokoev
Department of Applied Mathematics and Informatics, KSUCTA them. N.Isanova

APPLICATION OF PROGRAMMING FOR THE APPROXIMATE SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

This article describes the solution of linear boundary value problems of a second-order differential equation and the application of the C ++ programming language for solving this problem.

Keywords: *mathematical methods, solution, problem, differential equation*

При решении научных и инженерно-технических задач часто бывает необходимо математически описать какую-либо динамическую систему. Лучше всего это делать в виде дифференциальных уравнений или системы дифференциальных уравнений. В связи с интенсивным применением дифференциальных уравнений в качестве математических моделей широкого круга естественнонаучных задач и с появлением высокопроизводительных ЭВМ важное значение приобрели численные методы их решения. Численные методы - это алгоритмы вычисления приближенных значений искомого решения в точках конечного множества значений аргумента (узлах сетки).

Численные методы в настоящее время относятся к основным методам решения задач математики и в различных ее приложениях. Главная особенность обучения основам численных методов, которая все отчетливее проявляется в последние годы, связана с интенсификацией процессов использования различных специализированных математических пакетов и систем программирования вычислительных методов как инструмента решения прикладных задач.

Широкое внедрение математических методов видим в моделирования для решения вычислительных задач, современные численные методы в совокупности с возможностью их автоматизации при использовании персональных компьютеров и превращаются в такой рабочий инструмент для решения задач научного, технического, экономического характера и др. [2].

Использование ЭВМ в процессе математического исследования модели требует специфических численных методов, т. е. такой интерпретации математической *(дискретной* или *вычислительной)* модели, которая может быть реализована на ПЭВМ [2].

Рассматриваем решение линейных краевых задач дифференциального уравнения второго порядка с применением языка программирования С++ для решения данной задачи. Смысл краевой задачи состоит в том, что решение дифференциального уравнения должно удовлетворять граничным условиям, связывающим значения искомой функции более чем в одной точке.

Простейшим представителем краевой задачи является двухточечная граничная задача, для которой граничные условия задаются в двух точках, как правило, на концах интервала, на котором ищется решение. Двухточечные граничные задачи встречаются во всех областях науки и техники.

Постановка краевых задач

Пусть дано дифференциальное уравнение второго порядка

$$F(x.\ y.\ y'\ .y'')=0 \qquad (1)$$

Двухточечная краевая задача для уравнения (1) ставится следующим Образом: найти функцию y = y(x), которая внутри отрезка [a, b] удовлетворяет уравнению (1), а на концах отрезка – краевым условиям

$$\left.\begin{aligned} \Phi1[y\,(a), y'\,(a)\,] = 0, \\ \Phi2\,[y(b), y'\,(b)\,] = \ 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Рассмотрим случай, когда уравнение (1) и граничные условия (2) линейны. Такая краевая задача называется линейной краевой задачей. В этом случае дифференциальное уравнение и краевые условия записываются так:

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x) \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} a0y\,(a) + a_1 y'(a) = A, \\ \beta_0 y(b) +\ \beta_1 y'(b) = B, \end{aligned}\right\} \qquad (4),$$

где p (x), q(x), f(x) – известные непрерывные на отрезка [a, b] функции, $\alpha_0,\ \alpha_1, \beta_0,$ β_1, A, B,— заданные постоянные, причем $|a_0|+|a_1|\neq0$ и $|\beta_0|+|\beta_1|\neq0$.

Если A=B=0, то краевые условия (4) называются однородными.

Методы решения краевых задач

Большинство используемых численных методов решения краевых задач может быть отнесено к одному из трех больших классов.

- Методы стрельбы.
- Конечно-разностные методы.
- Проекционные или вариационные методы.

Мы описываем *конечно-разностные*, или *сеточные методы* решения краевых задач.

Пусть x_0=a, x_n=b, x_i=x_0+ih (i=1,2,…,n−1)−система равноотстоящих узлов некоторым шагом h=$\frac{b-a}{n}$ и p_i=p(x_i), q_i=(x_i), f_i=f (x_i).

Обозначим получаемые в результате расчета приближенные значения искомой функции y(x) и ее производные $y^{/}$ (x_i), y^n(x) в узлах x_i через y_i, $y^{/}_{I}$, y^{m}_{i} соответственно. Заменим приближенно в каждом внутреннем узла производные $y'(x_i)$, $y^n(x_i)$ конечно-разностными отношениями

$$y'_i=\frac{y_i+1-y_i}{h}, \qquad y''_i=\frac{y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i}{h^2}, \qquad (5)$$

а на концах положим

$$y'_i=\frac{y_1-y_0}{h}, \qquad y'_n=\frac{y_n-y_{n-1}}{h}. \qquad (6)$$

Используя эти формулы, приближенно заменим уравнение (3) и краевые условия (4) системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i}{h^2}+p_i\dfrac{h_{i+1}-h_i}{h}+g_iy_i = f_i (i=0,1,2,...,n-2) \\ a_0y_0+a_1\dfrac{y_1-y_0}{h}=A, \beta_0y_n+\beta_1\dfrac{y_n-y_{n-1}}{h}=B \end{cases} \qquad (7)$$

Получим линейную алгебраическую систему n+1 уравнений с n+1 неизвестными. Решив ее, если это возможно, получим таблицу приближенных значений искомой функции. Условия разрешимости такой системы рассматриваются в /2/ и /3/. Более точные формулы получаются, если заменить $\boldsymbol{y'(x_i)}$, $\boldsymbol{y^n(x_i)}$ центрально-разностными отношениями

$$y_i^{/}=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}, \quad y_i^{//}=\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}. \qquad (8)$$

Тогда получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{y_i-2y_{i+1}+y_i}{h}+p_i\dfrac{h_{i+1}-h_i}{2h}+g_iy_i = f_i (i=0,1,2,...,n-2) \\ a_0y_0+a_1\dfrac{y_1-y_0}{h}=A, \beta_0y_n+\beta_1\dfrac{y_n-y_{n-1}}{h}=B \end{cases} \qquad (9)$$

При большом ***n*** непосредственное решение систем (7), (9) становится громоздким и указывается достаточно простой метод, разработанный специально для решения систем такого вида. Оценка погрешности метода конечных разностей для задачи (3), (4)
имеет вид

$$\left|y_I-y(x_I)\right| \le \frac{h^2M_4}{96}(b-a)^2, \qquad (10)$$

где $y(x_i)$ — значение точного решения при $x=x_i$, $M_4 = max\left|y^{(4)}(x)\right|$.

Пример

Найти решение краевой задачи методом конечных разностей

$$\left.\begin{matrix} x^2y'+xy'=1, \\ y(1)=0, \ y(1{,}4)=\frac{1}{2}ln^2(1{,}4)=0{,}0566. \end{matrix}\right\} \qquad (2.7)$$

Для решения используем формулы (8), заменяем уравнение (11) системой конечно - разностных уравнений

$$x_i^2\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+x_i\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}=1$$

В результате приведения подобных членов получаем

$$y_{i-1}(2x_i^2-hx_i)-4x_i^2y_i+y_{i+1}(2x_i^2+hx_i)=2h^2 \qquad (12)$$

Выберем шаг h = 0,1. Тогда получим три внутренних узла
$x_i = 0.1*i+1$ (i = 1,2,3). Написав уравнение (12) для каждого из этих узлов,

$$i=1, \quad y_0(2x_1^2-0.1x_1)-4x_1^2y_1+y_2(2x_1^2+0.1x_1)=2\cdot 0.1^2$$
$$i=2, \quad y_1(2x_2^2-0.1x_2)-4x_2^2y_2+y_3(2x_2^2+0.1x_2)=2\cdot 0.1^2$$
$$i=3, \quad y_2(2x_3^2-0.1x_3)-4x_3^2y_3+y_4(2x_3^2+0.1x_3)=2\cdot 0.1^2$$

получим систему

$$\left.\begin{aligned} 2{,}31y_0 - 4{,}84y_1 + 2{,}53y_2 &= 0{,}02,\\ 2{,}76y_1 - 5{,}76y_2 + 3{,}00y_3 &= 0{,}02,\\ 3{,}25y_2 - 6{,}76y_3 + 3{,}51y_4 &= 0{,}02.\end{aligned}\right\} \qquad (2.9)$$

В граничных узлах

$$y_0 = 0, \qquad y_4 = 0{,}0566.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} -4{,}84y_1 + 2.53y_2 \qquad &= 0.02\\ 2.76y_1 - 5.76y_2 + 3.00y_3 &= 0.02\\ 3.25y_2 - 6.76y_3 &= -0.1787\end{aligned}\right\}$$

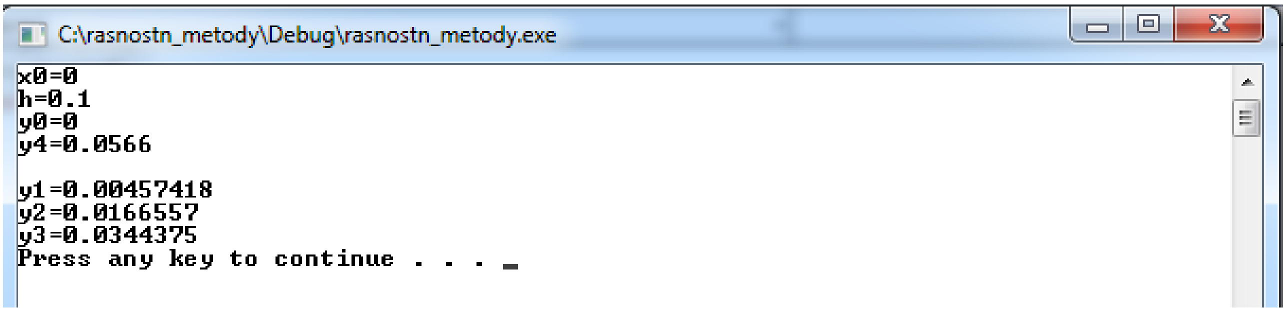
Решив систему и получаем

$$y_1 = 0{,}0046, \quad y_2 = 0{,}0167, \quad y_3 = 0{,}0345.$$

Для реализации решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка методом конечных разностей выбран язык С++.

```
#include "stdafx.h"
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include<cstdlib>
#include<cmath>
using namespace std;
int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[])
{
	double y[3][4];
double D, Dy1, Dy2, Dy3, y1, y2, y3;
double x1, x2, x3, y0, y4, h, x0;
cout<<"x0=";
cin>>x0;
cout<<"h=";
cin>>h;
cout<<"y0=";
cin>>y0;
cout<<"y4=";
cin>>y4;
x1=h*1+1;
x2=h*2+1;
x3=h*3+1;
y[0][0]=-4*pow(x1,2);
y[0][1]=2*pow(x1,2)+h*x1;
y[0][2]=y[2][0]=0;;
y[0][3]=2*pow(h,2)-y0*(2*pow(x1,2)-h*x1);
y[1][0]=2*pow(x2,2)-h*x2;
y[1][1]=-4*pow(x2,2);
y[1][2]= 2*pow(x2,2)+h*x2;
```

```
y[1][3]= 2*pow(h,2);
y[2][1]=2*pow(x3,2)-h*x3;
y[2][2]=-4*pow(x3,2);
y[2][3]=2*pow(h,2)-y4*(2*pow(x3,2)+h*x3);
D= y[0][0]*( y[1][1]* y[2][2]- y[1][2]* y[2][1])- y[0][1]*( y[1][0]* y[2][2]- y[1][2]* y[2][0])+
y[0][2]*( y[1][0]* y[2][1]- y[1][1]* y[2][0]);
Dy1= y[0][3]*( y[1][1]* y[2][2]- y[1][2]* y[2][1])- y[0][1]*( y[1][3]* y[2][2]- y[1][2]* y[2][3])+
y[0][2]*( y[1][3]* y[2][1]- y[1][1]* y[2][3]);
Dy2= y[0][0]*( y[1][3]* y[2][2]- y[1][2]* y[2][3])- y[0][3]*( y[1][0]* y[2][2]- y[1][2]* y[2][0])+
y[0][2]*( y[1][0]* y[2][3]- y[1][3]* y[2][0]);
Dy3= y[0][0]*( y[1][1]* y[2][3]- y[1][3]* y[2][1])- y[0][1]*( y[1][0]* y[2][3]- y[1][3]* y[2][0])+
y[0][3]*( y[1][0]* y[2][1]- y[1][1]* y[2][0]);
y1=Dy1/D;
y2=Dy2/D;
y3=Dy3/D;
cout<<"\ny1="<<y1<<endl;
cout<<"y2="<<y2<<endl;
cout<<"y3="<<y3<<endl;
system("pause");
return 0;
}
```



Список использованной литературы:

1. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, Т.2. М.: ГИФМЛ, 1959. - 620 с
2. Колдаев В. Д. Численные методы и программирование: учебное пособие / Под ред. проф. Л, Г. Гагариной. — М.: ИД «ФОРУМ»: ИНФРА-М, 2009. 336 с.
3. Бахвалов Н, С., Лапин А. В., Чижонков Е. В. Численные методы в задачах и упражнениях. М.: Высш. шк., 2000
4. Культин Н.Б. С/С++ в задачах и примерах 2-е изд., перераб. И доп.- СПб.: «БХВ-Петербург» 2012. -368 с.:ил.
5. Лафоре Р. Объектно-ориентированное программирование в С++. Классика Computer Science. 4-е изд. - СПб.: Питер, 2011. - 928 с.: ил.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Джаманбаев М. Дж.

УДК 517.912 (045/046)

Осмонканов А.М., Сыдыков У.З., Молдобекова Ж.М.
Н. Исанов а. КМАКТАУ, «Колдонмо математика жана информатика» кафедрасы

ДИФФЕРНЦИЯЛДЫК ТЕНДЕМЕЛЕР ЖАНА АЛАРДЫ ЧЫГАРУУНУН АЙРЫМ ЫКМАЛАРЫ