

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

УДК: 532.5

DOI 10.33514/BK-1694-7711-2022-1(2)-242-246

Абдылдаев М.Ю., Керимов У.Т., Ачекеев К. С., Мукамбетова М. Т.

И.Арабаев атындагы КМУ, физика жана аны окутуу технологиясы кафедрасы, т.и.д,
профессор,

И.Арабаев атындагы КМУ, колдонмо информатика кафедрасы, доценттин м.а.,

И.Арабаев атындагы КМУ, колдонмо информатика кафедрасы, ага окутуучу,

И.Арабаев атындагы КМУ, физика жана аны окутуу технологиясы кафедрасы, ага окутуучу

Абдылдаев М.Ю., Керимов У.Т., Ачекеев К. С., Мукамбетова М. Т.

КГУ им. И.Арабаева, кафедра физики и технология ее обучения, д.т.н., профессор,

КГУ им. И.Арабаева, кафедра прикладной информатики, и.о. доцента,

КГУ им. И.Арабаева, кафедра прикладной информатики, старший преподаватель,

КГУ им. И.Арабаева, кафедра физики и технология ее обучения, старший преподаватель

Abdyldaev M. Yu., Kerimov U.T., Achekeev K.S., Mukambetova M. T.

KSU I. Arabaev, Department of Physics and Technology of its Education, Doctor of Technical
Sciences, Professor,

KSU I. Arabaev, Department of Applied Informatics, Acting associate professor,

KSUI. Arabaev, Department of Applied Informatics, Senior Lecturer,

KSU I. Arabaev, Department of Physics and Technology of its Teaching, Senior Lecturer

**ОГУНДА КӨП БУРЧТУК ТОСКООЛДУККА ЭЭ БОЛГОН ТҮБҮНДӨ
СИММЕТРИЯЛУУ ТЕШИК МЕНЕН КЕСИЛИШ ИДИШТЕРИНЕН АГЫП ЧЫГУУ
ИСТЕЧЕНИЯ ИЗ СОСУДОВ СТЕЧЕНИЯ С СИММЕТРИЧНЫМ ОТВЕРСТИЕМ
В ДНЕ ИМЕЮЩЕЙ НА ОСИ ПРЕПЯТСВИЕ В ВИДЕ МНОГОУГОЛЬНИКА
OUTFLOWS FROM CONFLICT VESSELS WITH A SYMMETRIC HOLE
IN THE BOTTOM OF A POLYGONAL OBSTACLE ON THE AXIS**

Аннотация: Бул макалада түбүндө симметриялуу тешиги бар тик бурчтуу идиштен идеалдуу суюктуктун чыгышын изилдейбиз. Н.Е.Жуковскийдин классикалык ыкмасын колдонуп маселелерди чыгаруу, параметрлик түрдө жалпы чыгарылышы табылган. Кысуу катышы жана эркин беттик теңдемеси изделген.

Аннотация: В данной статье исследуется истечения идеальной жидкости из прямоугольного сосуда с симметричным отверстием в дне. Решая задачи классическим методом Н.Е. Жуковского, находится общее решение в параметрической форме. Ищется коэффициент сжатия и уравнение свободной поверхности.

Abstract: We study the outflow of an ideal fluid from a rectangular vessel with a symmetrical hole in the bottom. Solving problems by the classical method of N.E. Zhukovsky, find the general solution in parametric form. The compression ratio and the free surface equation are sought.

Негизги сөздөр: реактивдүү учактар, конформдук чагылдыруу, идеалдуу суюктук, параметрлер, комплексстүү потенциал.

Ключевые слова: струи, конформное отображение, идеальной жидкости, параметры, комплексный потенциал.

Keywords: jets, conformal mapping, ideal fluid, parameters, complex potential.

Рассматривается плоская задача теории струй об истечении идеальной, несжимаемой и невесомой жидкости из сосуда, изображенной на рисунке 1.

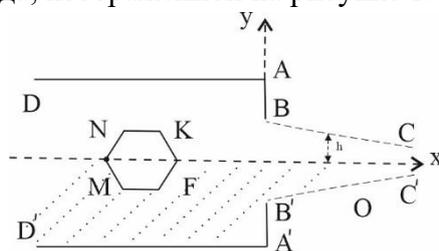


Рисунок.1. Картина течения в физической плоскости $z = x + iy$.

Подобные задачи исследованы в некоторых работах М.Ю.Абдылдаева [3]. Задача решается методом Н.Е.Жуковского [1]:

$$\omega = \ln \zeta = -\ln \frac{dw}{(v_0 dz)} = \ln \frac{v_0}{v} + i\theta \quad (1)$$

где θ - угол вектора скорости с осью абсцисс X. Скорость на струях BC(B'C') равна v_0 .

Для рращения задачи отобразим верхнюю половину области течения ($J_m z \geq 0$) и соответствующие ей области изменения функций $\frac{dw}{(v_0 dz)}$ и w на верхнюю половину плоскости параметрического переменного ($J_m t \geq 0$) (Рисунок 2).

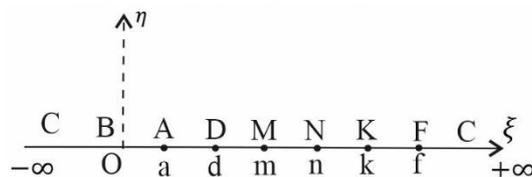


Рисунок 2. Параметрическая плоскость $t = \xi + i\eta$.

Пусть на одной граничной линии тока DABC функция тока $\psi = 0$, а на другой граничной линии тока DMNKFC $\psi = -q$, где q половина расхода жидкости в сосуде. При движении вдоль линии тока потенциал скоростей φ , очевидно, меняется от $-\infty$ до $+\infty$.

Таким образом область изменения комплексного потенциала ψ является полоса (рисунок 3) шириной q .

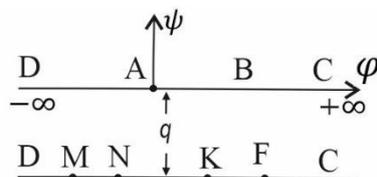


Рисунок 3. Область изменения комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$.

Отображение этой полосы на верхнюю полуплоскость параметрического переменного ($J_m t \geq 0$) осуществляется с помощью формулы Кристоффеля-Шварца [1].

$$w(t) = \frac{q}{\pi} \cdot \ln \frac{t-d}{1-d} - iq \quad (2)$$

Для установления правильности формулы (2) достаточно, очевидно проверить выполнения граничных условий.

В промежутке DM ($d < t < m$) имеем:

$J_m w = J_m \left[\frac{q}{\pi} \ln \frac{t-d}{1-d} - iq \right] = -q$. Таким же точно образом нетрудно убедиться, что на линии тока $MNKFC$ мнимая часть комплексного потенциала $\psi = -q$. На промежутках: $CB(-\infty < t < 0)$; $AB(0 < t < a)$; $AD(a < t < d)$:

$$J_m w = J_m \left[\frac{q}{\pi} \ln \frac{t+d}{1-d} - iq \right] = 0, J_m w = J_m \left[\frac{q}{\pi} \ln \frac{d-t}{1-d} - iq \right] = 0.$$

В верхней полуплоскости $w(t)$ является аналитической функцией и удовлетворяет всем граничным условиям.

Найдем теперь функцию $\omega(t) = \ln v_0/v + i\theta$.

Области течения в плоскости Н.Е.Жуковского является двулистной. В виду сложности отображения этой двулистной поверхности в верхней полуплоскости t , введем новую функцию связанной с функцией Шварца [3].

$$F(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_m F(\xi)}{\xi-t} d\xi \quad (3)$$

$F(t)$ определяется с помощью известного решения задачи об определении функции комплексного переменного в верхней полуплоскости по её заданной мнимой части.

Для нахождения отображения области изменения ω , т.е. для нахождения $\omega(t)$ введем вспомогательную функцию $\Omega(t)$:

$$\Omega(t) = \frac{\omega(t)}{\sqrt{t}} = \frac{\ln v_0/v}{\sqrt{t}} + i \frac{\theta}{\sqrt{t}} \quad (4)$$

Из рис.1. видно, что на линии $DABC$ известна мнимая часть функции $\Omega(t)$: на участке

$DA(a < t < d), J_m \Omega(t) = 0$, где $\theta = 0$; на $AB(0 < t < a)$

$J_m \Omega(t) = -\frac{\pi}{2\sqrt{t}}$, где $\theta = -\frac{\pi}{2}$ и на $BC(-\infty < t < 0), J_m \Omega = 0$, ($\theta \neq 0, J_m \Omega$ переходить на $Re\Omega$ и $v = v_0$).

На линии $DMNKFC$ также известна мнимая часть функции на участках: $DM(d < t < k), MN(m < t < n), NK(n < t < k), KF(k < t < 1)$ и $FC(1 < t < +\infty)$ соответственно имеют значения: $O(\theta = 0), \frac{\theta_0}{\sqrt{t}} (\theta = \theta_0), O(\theta = 0), -\frac{\theta_0}{\sqrt{t}} (\theta = \theta_0), O(\theta = 0)$.

Таким образом, видоизмененный интеграл Шварца для верхней полуплоскости для нашего случая имеет вид:

$$\frac{\omega(t)}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \int_0^a \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}(\xi-t)} + \frac{\theta_0}{\pi} \int_m^n \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}(\xi-t)} - \frac{\theta_0}{\pi} \int_k^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}(\xi-t)}$$

Откуда

$$\omega(t) = \ln \left\{ \frac{\sqrt{t+\sqrt{a}}}{\sqrt{t-\sqrt{a}}} \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{n-\sqrt{t}}}{\sqrt{n+\sqrt{t}}} \cdot \frac{\sqrt{m+\sqrt{t}}}{\sqrt{m-\sqrt{t}}} \cdot \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}} \cdot \frac{\sqrt{k-\sqrt{t}}}{\sqrt{k+\sqrt{t}}} \right\}^{\theta_0/\pi} \quad (5)$$

$$\zeta(t) = \left\{ \frac{\sqrt{t+\sqrt{a}}}{\sqrt{t-\sqrt{a}}} \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{n-\sqrt{t}}}{\sqrt{n+\sqrt{t}}} \cdot \frac{\sqrt{m+\sqrt{t}}}{\sqrt{m-\sqrt{t}}} \cdot \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}} \cdot \frac{\sqrt{k-\sqrt{t}}}{\sqrt{k+\sqrt{t}}} \right\}^{\theta_0/\pi} \quad (6)$$

$$\bar{\zeta}(t) = \left\{ \frac{\sqrt{t-\sqrt{a}}}{\sqrt{t+\sqrt{a}}} \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{n+\sqrt{t}}}{\sqrt{n-\sqrt{t}}} \cdot \frac{\sqrt{m-\sqrt{t}}}{\sqrt{m+\sqrt{t}}} \cdot \frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} \cdot \frac{\sqrt{k+\sqrt{t}}}{\sqrt{k-\sqrt{t}}} \right\}^{\theta_0/\pi} \quad (7)$$

В формуле (7) обеспечено нужное соответствие характерных точек границы:

$$\bar{\zeta}(a) = \left\{ \begin{matrix} v = 0 \\ \theta = 0 \end{matrix} \right\}, \bar{\zeta}(0) = \left\{ \begin{matrix} v = v_0 \\ \theta = -\pi/2 \end{matrix} \right\}, \bar{\zeta}(d) = \left\{ \begin{matrix} v = v_\infty \\ \theta = 0 \end{matrix} \right\}, \bar{\zeta}(m) = \left\{ \begin{matrix} v = 0 \\ \theta = 0 \end{matrix} \right\},$$

$$\bar{\zeta}(n) = \left\{ \begin{matrix} v = \infty \\ \theta = \theta_0 \end{matrix} \right\}, \bar{\zeta}(k) = \left\{ \begin{matrix} v = \infty \\ \theta = 0 \end{matrix} \right\}, \bar{\zeta}(1) = \left\{ \begin{matrix} v = 0 \\ \theta = -\theta_0 \end{matrix} \right\}, \bar{\zeta}(\infty) = \left\{ \begin{matrix} v = \theta_0 \\ \theta = 0 \end{matrix} \right\}.$$

Так как функция $\bar{\zeta}(t) = \frac{dw(t)}{v_0 dz}$ удовлетворяет граничным условиям задачи и аналитична в любой точке верхней полуплоскости t , то формула (7) решает задачу конформном отображении $\bar{\zeta}(t)$ на верхнюю полуплоскость t .

Для вычисления геометрических параметры задачи нужно найти функцию $z(t)$. Из (2) и (7) следует, что

$$Z(t) = \frac{q}{\pi v_0} \int_0^t \zeta(t) \cdot \frac{dt}{t-d} + ih \quad (8)$$

где $h = |OB|$ (Рис.1.), функция $\zeta(t)$ определяется формулой (6). Формулы (2), (7) и (8) дают общее решение задачи в параметрической форме.

Из рис.1 видно, что $|MN| = |KF|$ ($l_2 = |MN|, l_4 = |KF|$)

Откуда

$$\int_m^n \zeta(t) \frac{dt}{t-d} = \int_k^1 \zeta(t) \frac{dt}{t-d} \quad (9)$$

Равенства (9) устанавливает зависимости между вспомогательными параметрами a, d, m, n и k .

Вышеперечисленные формулы позволяют найти наиболее интересную для нашей задачи величину коэффициент сжатие струи, равный отношению ширины струи в бесконечности (h') к ширине отверстия (h) в стенке OB (рис.1).

Из рисунка видно, что $\vec{FB} = \vec{FO} + \vec{OB}$, ($L = |\vec{FO}|, h = |\vec{OB}|$).

Для определения L и h рассмотрим изменения $Z(t)$ от точки $F(1)$ до точки $B(0)$ (рис.1).

$$L + ih = \frac{h'}{\pi} \int_1^\rho \zeta(t) \frac{dt}{t-d}, \text{ где } h' = \frac{q}{v_0}.$$

Преобразуем выражение так, чтобы в него входили интегралы по отрезком действительной оси $t = \xi$:

$$L + ih = \frac{h'}{\pi} \int_1^\rho \zeta(t) \frac{dt}{t-d} + \int_{\Gamma_\rho} \zeta(t) \frac{dt}{t-d} + \int_{-\rho}^0 \zeta(t) \frac{dt}{t-d} \quad (10)$$

где Γ_ρ - полуокружности радиуса ρ с центром в начале координат. Введем обозначения:

$$J_1 = \int_1^\rho \zeta(t) \frac{dt}{t-d}; J_2 = \int_{\Gamma_\rho} \zeta(t) \frac{dt}{t-d}; J_3 = \int_{-\rho}^0 \zeta(t) \frac{dt}{t-d} \quad (11)$$

При $\rho \rightarrow \infty$ интеграл J_2 принимает значения равны $i\pi$. В формуле J_3 при $t = -\tau$ ($\tau \geq 0$), модуль $|\zeta(\tau)| = 1$, а аргумент определяется следующим образом:

$$J_3 = - \int_0^\rho e^{iA^*(\tau)} \frac{d\tau}{\tau+d} = - \int_0^\rho [\cos A(\tau) + i \sin A(\tau)] \frac{d\tau}{\tau+d},$$

где

$$A(\tau) = \frac{1}{2} \left(-\pi + 2 \arctg \sqrt{\frac{\tau}{a}} \right) + \frac{\theta_0}{\pi} \left(-2 \arctg \sqrt{\frac{\tau}{n}} + 2 \arctg \sqrt{\frac{\tau}{m}} + 2 \arctg \sqrt{\tau} - 2 \arctg \sqrt{\frac{\tau}{k}} \right) \quad (12)$$

Откуда

$$\left. \begin{aligned} Re J_3 &= - \int_0^\rho \cos[-A(\tau)] \frac{d\tau}{\tau+d} \\ J_m J_3 &= \int_0^\rho \sin[-A(\tau)] \frac{d\tau}{\tau+d} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Первый интеграл J_1 при $\rho \rightarrow \infty$ существует, ограничен и действителен. Исходя из значения интегралов J_1, J_2 и J_3 для L и h имеем:

$$L = Re \int_1^0 \frac{dz}{dt} dt = \frac{h'}{\pi} \left\{ \int_1^\rho \zeta(t) \frac{dt}{t-d} + \int_0^\rho \cos[-A(\tau)] \frac{d\tau}{\tau+d} \right\} \quad (14)$$

$$h = J_m \int_1^0 \frac{dz}{dt} dt = h' \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^\rho \sin[-A(\tau)] \frac{d\tau}{\tau+d} \right\} \quad (15)$$

Из формулы (15) можно найти коэффициент сжатия струи:

$$K_0 = \frac{\pi}{\pi + \int_0^\infty \sin[-A(\tau)] \frac{d\tau}{\tau+d}} \quad (16)$$

Из (16) можно найти следующие коэффициента сжатия струи:

1⁰. $a = d = m = n = k = 1$ отсутствует препятствие.

Значение коэффициента сжатия для прямоугольного сосуда при этом совпадает со значением коэффициента сжатия струи, вытекающей из отверстия в стенке (М.Н. Гуревич гл. II, § 7. стр.62.)

Список использованной литературы:

1. Гуревич, М. И. Теория струй идеальной жидкости / М.И. Гуревич. – М.: 1961.
2. Абдылдаев, М. Ю. Плоские задачи теории струй идеальной жидкости / М.Ю. Абдылдаев. – НАН КР Институт автоматки, «Илим», Бишкек.: 1999.
3. Лаврентьев, М.А., Шабат, Б.В. Методы теории струй комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.:1973.

References:

1. Gurevich, M.I. The theory of jets of an ideal liquid / M.I. Gurevich. – M.: 1961.
2. Abdyldaev, M. Yu. Flat tasks of the theory of jets of ideal fluid / M.Yu. Abdyldaev. - NAS KR Institute of Automation, "Ilim", Bishkek.: 1999.
3. Lavrentiev, M.A., Shabat, B.V. Methods of the theory of jets of a complex variable / M.A. Lavrentiev, B.V. Shabbat. - M.: 1973.

УДК: 796:796.5

DOI 10.33514/ВК-1694-7711-2022-1(2)-246-250

Курманбеков К.

И. Раззаков атындагы Кыргыз мамлекеттик техникалык университети, окутуучу

Курманбеков К.

Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова, преподаватель

Kurmanbekov K.

Kyrgyz State Technical University named after I.Razzakov, teacher

**ЧҮЙ, КЕМИН ӨРӨӨНДӨРҮНДӨГҮ РЕКРЕАЦИЯЛЫК ЧАРБА - ЖАРАТЫЛЫШ
ПАРКТАРЫ
РЕКРЕАЦИОННЫЕ ХОЗЯЙСТВА - ПРИРОДНЫЕ ПАРКИ В ДОЛИНАХ ЧҮЙ И
КЕМИН
RECREATIONAL FARMS - NATURAL PARKS IN THE VALLEYS OF CHUY AND
KEMIN**