УДК. 517.924
DOI 10.33514/BK-1694-7711-2023-2(1)-307-310

Алымбаев А. Т, Бапа кызы А.
И.Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети, физика-математика илимдеринин доктору, профессор,
К.Тыныстанов атындагы Ысык-Көл мамлекеттик университети, ага окутуучу
Алымбаев А. Т, Бапа кызы А.
Кыргызский государственный университет им. И.Арабаева, доктор физико-математических наук, профессор,
Иссык-Кульский государственный университет им.К.Тыныстанова, старший преподаватель
Alymbaev A. T., Bapa kyzy A
Kyrgyz State University I. Arabaev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Issyk-Kul State University K. Tynystanov, Senior Lecturer

ДЮФФИНГДИН КЕЧИККЕН АРГУМЕНТТҮҮ МҮЧӨНҮ КАРМАГАН ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕСИНИН МЕЗГИЛДИК ЧЫГАРЫЛЫШЫ
ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЮФФИНГА С ЧЛЕНОМ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО АРГУМЕНТА
PERIODIC SOLUTION OF THE DIFFERENTIAL DUFFING EQUATION WITH A DELAY TERM

Аннотация: Макалада Дюффингдин кечиккен аргументтүү мүчөнү кармаган экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдеменин мезгилдик чыгарылышын тургузуу маселеси каралат. Мезгилидик чыгарылышты табуу Галеркиндин методунун классына кирген, гармоникалык баланс ыкмасынын негизинде ишке ашырылат. Мезгилдик чыгарылыш Фурьенин катары түрүндө изделип, анын “биринчи” жакындашуусунун мүчөлөрү аныкталат. Кечиккен параметрдин таасири термелүүнүн фазасына, амплитудасы жана жыштыгына болоору көрсөтүлдү.

Аннотация: В данной статье рассматривается задача построения периодического решения дифференциального уравнения Дюффинга с членом запаздывающего аргумента. Построение периодического решения реализуется методом гармонического баланса, которая относится классу методов Галеркина. Периодическое решение ищется в виде ряда Фурье и определяется его так называемые члены «первых» приближений. Показано, влияние запаздывания на фазу, амплитуды и частоту колебания которое описывается периодическим решением.

Abstract: The article considers the problem of constructing a periodic solution of the Duffing differential equation with a term of the retarded argument. The construction of a periodic solution is implemented by the harmonic balance method, which belongs to the class of Galerkin methods. The periodic solution is sought in the form of a Fourier series and its so-called members of the "first" approximations are determined. It is shown that the influence of delay on the phase, amplitude and frequency of oscillations is described by the periodic solution.

Негизги сөздөр: Дюффингдин дифференциалдык теңдемеси, мезгилдик чыгарылыш, кечиккен параметр, гармоникалык баланс методу.

Ключевые слова: Дифференциальное уравнение Дюффинга, периодическое решение, параметр запаздывания, метод гармонического баланса.

Keywords: Duffing differential equation, periodic solution, delay parameter, harmonic balance method.

Кечиккен аргументти кармаган Дюффингдин дифференциалдык теңдемесин карайлы

$$x''(t) = -x(t) - \varepsilon_1 x^3 + \lambda x(t-\tau), \quad (1)$$

Мында ε_1–кичине параметр, λ-сандык параметр

(1) теңдеменин мезгилдик чыгарылышынын биринчи жакындашуусун:

$$x(t) = a_0 + a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t, (2)$$

түрүндө издейбиз. a_0, a_1, b_1 тандалып алынуучу сандар. $x'(t), x''(t)$ жана $x(t-\tau)$ мүчөлөрүн табабыз:

$x'(t) = -a_1\omega\sin\omega t + b_1\omega\cos\omega t,$

$x''(t) = -a_1\omega^2\cos\omega t - b_1\omega^2\sin\omega t,$ (3)

$x(t-\tau) = a_0 + a_1\cos\omega(t-\tau) + b_1\sin\omega(t-\tau) = a_0 + a_1(\cos\omega t\cdot\cos\omega\tau +$
$+\sin\omega t\sin\omega\tau) + b_1(\sin\omega t\cdot\cos\omega\tau - \cos\omega t\cdot\sin\omega\tau) = a_0 + (a_1\cos\omega\tau - b_1\sin\omega\tau)\cdot$
$\cdot\cos\omega t + (a_1\sin\omega\tau + b_1\cos\omega\tau)\sin\omega t$ (4)

$\dot{x}(0) = 0,$ анда $\dot{x}(0) = b_1\omega = 0.$ Мындан $b_1 = 0.$

(2), (3), (4) туюнтмалардан төмөндөгүдөй жазылыштарды алабыз:

$x(t) = a_0 + a_1\cos\omega t$

$x'(t) = -a_1\omega\sin\omega t, \qquad x''(t) = -a_1\omega^2\cos\omega t$

$x(t-\tau) = a_0 + a_1\cos\omega\cdot\cos\omega\tau + a_1\sin\omega t\sin\omega\tau$ (5)

$x^3(t) = (a_0 + a_1\cos\omega t)^3 = a_0{}^3 + 3a_0{}^2a_1\cos\omega t + 3a_0a_1{}^2\cos^2\omega t + a_1{}^3\cos^3\omega t$ (6)

(5), (6) туюнтмаларды (1) теңдемеге коебуз:

$-a_1\omega^2\cos\omega t - b_1\omega^2\sin\omega t = -a_0 - a_1\cos\omega t - b_1\sin\omega t - \varepsilon_1 a_0{}^3 - \varepsilon_1 3a_0{}^2a_1\cos\omega t -$
$\varepsilon_1 3a_0a_1{}^2\cos^2\omega t - \varepsilon_1 a_1{}^3\cos^3\omega t + \lambda a_0 + \lambda(a_1\cos\omega\tau - b_1\sin\omega\tau)\cdot\cos\omega t + \lambda(a_1\sin\omega\tau +$
$+b_1\cos\omega t)\sin\omega t$ (7)

$$\cos^2\omega t = \frac{1+\cos 2\omega t}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\omega t}{2} \quad (8)$$

$$\cos^2\omega t = \frac{1}{2}\cos\omega t + \frac{1}{2}\cos\omega t\cos 2\omega t = \frac{1}{2}\cos\omega t + \frac{1}{4}\cos\omega t + \frac{1}{4}\cos\omega t =$$
$$= \frac{3}{4}\cos\omega t + \frac{1}{4}\cos 3\omega t \quad (9)$$

(8), (9) эске алып, (7) ден төмөндөгүдөй барабардыктарды алабыз:

$$-a_1\omega^2\cos\omega t = -a_0 - \varepsilon_1 a_0{}^3 + \lambda a_0 - \frac{3}{2}a_0a_1{}^2 - a_1\cos\omega t - 3a_0{}^2a_1\cos\omega t - \frac{3}{4}a_1{}^3\cos\omega t +$$
$$+\lambda a_1\cos\omega\tau\cdot\cos\omega t + \lambda a_1\sin\omega\tau\sin\omega t - \frac{3}{2}a_0a_1{}^2\cos 2\omega t - \frac{1}{4}a_1{}^3\cos 3\omega t \quad (10)$$

(10) барабардыктан ωt гарманиканы кармаган мүчөлөр менен чектелип, төмөндөгүдөй барабардыкты алабыз:

$-a_0 - \varepsilon_1 a_0{}^3 + \lambda a_0 - \frac{3}{2}a_0a_1{}^2 = 0,$

$a_1\omega^2 - a_1\cos\omega t - 3a_0{}^2a_1 - \frac{3}{4}a_1{}^3 + \lambda a_1\cos\omega\tau = 0,$ (11

$\lambda a_1\sin\omega\tau = 0.$

$\cos\omega t = 1 - \dfrac{\omega^2\tau^2}{2}, \qquad \sin\omega t = \omega\tau - \dfrac{\omega^3\tau^3}{2},$

экендигин эске алып, (11) системаны төмөндөгүдөй түрдө жаза алабыз:

$a_0(-1 - \varepsilon_1 a_0{}^2 + \lambda - \dfrac{3}{2}a_1{}^2) = 0,$

$a_1(\omega^2 - 1 - 3a_0{}^2 - \dfrac{3}{4}a_1{}^2 + \lambda(1 - \dfrac{\omega^2\tau^2}{2})) = 0,$

$\lambda a_1\omega\tau(1 - \dfrac{\omega^2\tau^2}{6}) = 0.$

Бул системадан $\omega^2 = \frac{6}{\tau^2}, \omega = \frac{\sqrt{6}}{\tau}.$

$$\varepsilon_1 a_0{}^2 + \frac{3}{2}a_1{}^2 = \lambda - 1,$$
$$3a_0{}^2 + \frac{3}{4}a_1{}^2 = 3\left(\frac{2}{\tau^2} - \lambda\right).$$

Мындан

$$a_0{}^2 = \frac{21\lambda - \frac{36}{\tau^2} - 3}{3\varepsilon_1 - 18}, \qquad a_1{}^2 = \frac{(12\varepsilon_1 + 3)\lambda + \frac{24}{\tau^2} + 3}{3\varepsilon_1 - 18}. \quad (12)$$

ε_1 параметри $0 \le \varepsilon_1 \le 1$ болгондуктан $3\varepsilon_1 - 18 < 0$.

Демек, λ параметрин $21\lambda - \frac{36}{\tau^2} - 3 < 0,\ (12\varepsilon_1 + 3)\lambda + \frac{24}{\tau^2} + 3 < 0$ барабарсыздыктары аткарылгандай кылып тандап алышыбыз керек.

Барабарсыздыктардын биринчиси $21\lambda - \frac{36}{\tau^2} - 3 < 0$ эгерде $\lambda < 0$ болсо.

Демек, $(12\varepsilon_1 + 3)\lambda + \frac{24}{\tau^2} + 3 < 0$, эгерде $\lambda < \frac{-3-\frac{24}{\tau^2}\lambda}{12\varepsilon_1+3}$, анда $a_0{}^2 > 0, a_1{}^2 > 0.$

(12) барабардыктардан

$$a_0 = \sqrt{\frac{21\lambda - \frac{36}{\tau^2} - 3}{3\varepsilon_1 - 18}}, \qquad a_1 = \sqrt{\frac{(12\varepsilon_1 + 3)\lambda + \frac{24}{\tau^2} + 3}{3\varepsilon_1 - 18}}. \quad (13)$$

Ошентип, биринчи жакындаштырууда Дюффингдин (1) теңдемесинин мезгилдик чыгарылышы төмөндөгүдөй түрдө жазылат:

$$x(t) = \sqrt{\frac{21\lambda - \frac{36}{\tau^2} - 3}{3\varepsilon_1 - 18}} + \sqrt{\frac{(12\varepsilon_1 + 3)\lambda + \frac{24}{\tau^2} + 3}{3\varepsilon_1 - 18}} \cdot \cos\frac{\sqrt{6}}{\tau}. \quad (14)$$

Мезгилдик чыгарылыштын мезгили $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{6}}.$

$\varepsilon_1 = 0{,}01, \tau = 2, \lambda = -1{,}5$ маанилерин алсак $a_0 = 1{,}556$, $a_1 = 0{,}3$ ге ээ болобуз да, (14) туюнтмадан мезгилдик чыгарылыш

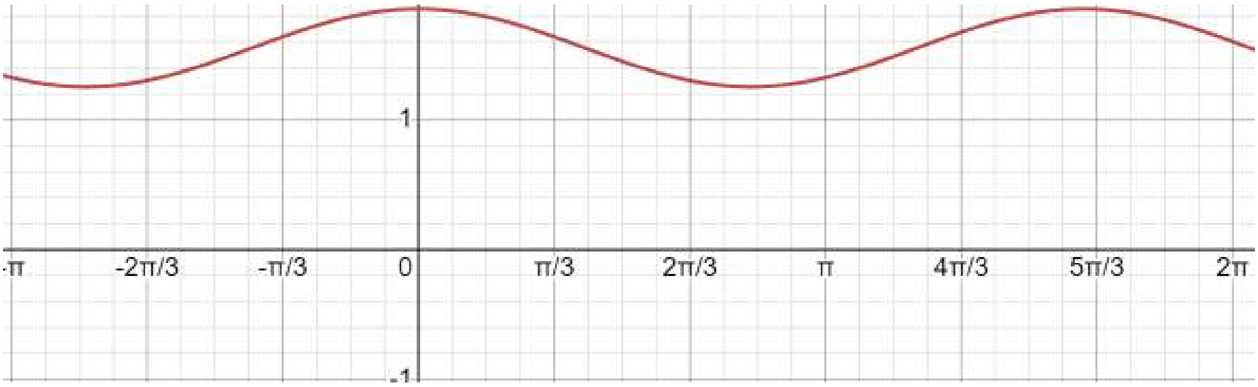
$x(t) = 1{,}556 + 0{,}3\cos 1{,}224t$ (15) функциясы аркылуу аныкталат.

$\varepsilon_1 = 0{,}01, \tau = 3, \lambda = -1{,}5$ маанилерин алсак $a_0 = 1{,}463$, $a_1 = 0{,}303$ ге ээ болобуз да, мезгилдик чыгарылыш

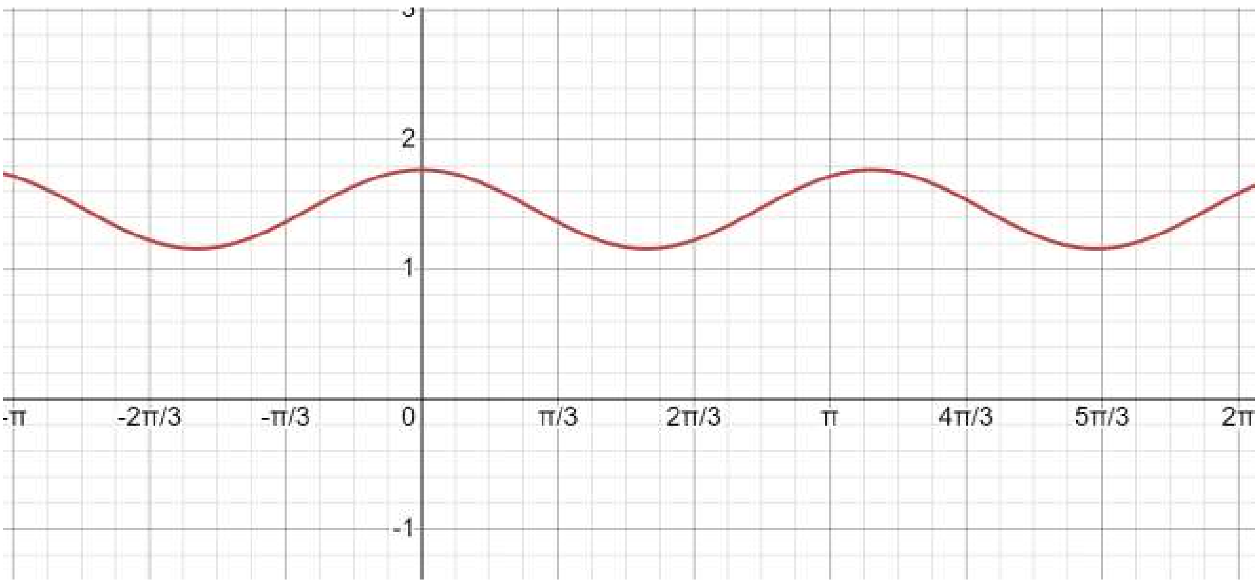
$$x(t) = 1{,}463 + 0{,}303\cos 1{,}816t \quad (16)$$

функциясы аркылуу аныкталат.

Декарттык координата системасында (15) функциясынын сүрөттөлүшү $0 \leq t < \infty$



Декарттык координата системасында (16) функциясынын сүрөттөлүшү $0 \leq t < \infty$



Колдонулган адабияттар:

1. Алымбаев А.Т. Численные, численно-аналитические и асимптотические методы исследования краевых задач: Монография // А.Т.Алымбаев. -Бишкек: изд. КНУ, 2015,-205 с.
2. Алымбаев А.Т., Бапа кызы Айнура. Влияние интегрального члена к решению системы уравнений Ван-дер-Поля// А.Т.Алымбаев., Бапа кызы Айнура // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. -Бишкек:2022, №1,-с.3-7.
3. Алымбаев А.Т., Бапа кызы Айнура. О методе гармонического баланса построения периодического решения системы автономных интегро-дифференциальных уравнений с бесконечным последействием. // А.Т.Алымбаев., Бапа кызы Айнура // Алатоо academic studies. -Бишкек: 2022, №2,-с.459-464.
4. Кондратьева Л.А. Численно-аналитические методы локализации предельных циклов в математических моделях нелинейной динамики: учебное пособие//Л.А.Кондратьева. -М.: изд. «Доброе слово», 2019, -48 с.