Колдонулган адабияттар:

1. Мамбетакунов Э., Койчуманов М., Жумабаев С., Бабаев Д. Физиканы окутуу методикасы., Бишкек-1991ж, 128б
2. Койчуманов М.К. Мектеп физикасы боюнча класстан тышкаркы иштер.Б.: 2016
3. Ланина И.Я. Не уроком единым развитие интереса к физике М.:Просвещение, 1991
4. Усова А.В., Вологодская З.А., Самостоятельная работа физике в средней школе.: Просвищение,1983.
5. Шишкин Н.Н. Клуб юных физиков- М.: Просвещение,1991

УДК 51: 378.148
DOI 10.33514/BK-1694-7711-2023-2(1)-323-329

Асанова Ж.К., Асылбекова К.Ж., Чокоева Г.С., Көчөрбаева Б.Э.,
И.Арабаева атындагы Кыргыз мамлекеттик университети, физика-математика илимдеринин кандидаты, доцент,
И.Арабаева атындагы Кыргыз мамлекеттик университети, ага окутуучу,
И.Арабаева атындагы Кыргыз мамлекеттик университети, педагогика илимдеринин кандидаты, доцент,
И.Арабаева атындагы Кыргыз мамлекеттик университети, ага окутуучу
Асанова Ж.К., Асылбекова К.Ж., Чокоева Г.С., Кочорбаева Б.Э.,
Кыргызский государственный университет им. И.Арабаева, кандидат физико-математических наук, доцент,
Кыргызский государственный университет им. И.Арабаева, старший преподаватель,
Кыргызский государственный университет им. И.Арабаева, кандидат педагогических наук, доцент,
Кыргызский государственный университет им. И.Арабаева, старший преподаватель
Asanova Zh.K., Asylbekova K.Zh., Chokoeva G.S., Kochorbaeva B.E.,
Kyrgyz State University I.Arabaev, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor.
Kyrgyz State University I.Arabaev, Senior Lecturer,
Kyrgyz State University I.Arabaev, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor,
Kyrgyz State University I.Arabaev, Senior Lecturer

ӨЗДҮК ЭМЕС ИНТЕГРАЛДАРДЫН КОЛДОНУЛУШТАРЫ
ПРИЛОЖЕНИЯ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ
APPLICATIONS OF NON-PROPRIETARY INTEGRALS

Аннотация: Өздүк эмес интегралдар кадимки аныкталган интегралдын масштабын кеңейтүүгө мүмкүндүк берүүчү математикалык анализдин күчтүү куралы болуп саналат. Белгилүү интегралдан айырмаланып, өздүк эмес интеграл берилген интервалда чексиз же үзгүлтүккө ээ функцияларды интегралдоо үчүн колдонулат. Бул макалада өздүк эмес интегралдын ар кандай тармактарда колдонулушунун бир нече конкреттүү мисалдары каралды, ошондой эле анын касиеттери, эсептөө ыкмалары жана графиктери берилди. Айлануудан пайда болгон фигуранын аянты жана көлөмү өздүк эмес интеграл менен чыгарылып берилди. Предмет аралык байланыштарды сабакта колдонуу студенттердин билим денгээлин көтөрүп, логикалык ой жүгүртүүсүн, чыгармачылык шыгын арттыруу менен алардын окуу материалды өздөштүрүүсүнө жардамы өтө чоң.

Аннотация: Несобственные интегралы — мощное средство математического анализа, позволяющее расширить область применения обычного определенного интеграла. В отличие от определенного интеграла, неопределенный интеграл используется для интегрирования функций с бесконечностью или разрывом на заданном интервале. В данной статье было рассмотрено несколько конкретных примеров использования несобственного интеграла в различных областях, а также приведены его свойства, методы расчета и графики. Площадь и объем фигуры, образованной вращением, рассчитывались с помощью неопределенного интеграла. Использование на уроке межпредметных связей повышает уровень знаний учащихся, повышает их логическое мышление, творческие способности, способствует усвоению учебного материала.

Abstract: Improper integrals are a powerful means of mathematical analysis that allows you to expand the scope of the usual definite integral. Unlike the definite integral, the indefinite integral is used to integrate functions with infinity or discontinuity over a given interval. In this article, several specific examples of the use of the improper integral in various areas were considered, as well as its properties, calculation methods and graphs. The area and volume of the figure formed by rotation were calculated using the indefinite integral. The use of interdisciplinary connections in the lesson increases the level of knowledge of students, increases their logical thinking, creative abilities, and contributes to the assimilation of educational material.

Негизги сөздөр: өздүк эмес интеграл, функция, ийри сызык, аянт, көлөм, үзгүлтүксүз, фигура.

Ключевые слова: несобственный интеграл, функция, кривая, площадь, объем, непрерывная, фигура.

Keywords: improper integral, function, curve, area, volume, continuous, figure.

Предмет аралык байланыштарды ишке ашыруунун каражаттарынын бири катары предмет аралык тексттик маселелерди кароо болуп эсептелинет. Берилген маселелер математиканы окутуунун бардык этаптарында жана сабактын этаптарында маанилүү роль ойнойт.

Предмет аралык байланыштарды ишке ашыруунун каражаты болуу менен алар ар кандай окуу предметтерин бириктирип, окуучулардын акыл-эс жана таанып-билүү иш-аракетин активдештирүү каражаты катары кызмат кылып, математиканы үйрөнүүгө болгон мотивацияны жана кызыгууну өнүктүрүүгө көмөктөшөт [3].

Бул макаланын максаты математиканын, физиканын жана техниканын ар кандай тармактарында өздүк эмес интегралдын колдонулушун карап чыгуу жана изилдөө болуп саналат.

Аныктама: Эгерде $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесиндисинде үзгүлтүктүү болсо, же $a = -\infty$ болсо, же $b = +\infty$ болсо, же $a = -\infty$ жана $b = +\infty$ болсо, анда

$\int_a^b f(x)dx$ интегралы өздүк эмес интеграл деп аталат.

Өздүк эмес интегралдардын түрлөрү:

$$\int_0^4 \frac{dx}{1-x},\ \int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2},\ \int_{-\infty}^{5} x dx,\ \int_0^{\infty} (x+1)dx,\ \int_{-\infty}^{\infty} (x^2+1)dx,$$ ж.б.

Өздүк эмес интегралдардын жыйналуучулугун, аныкталган интегралды колдонуп аныктайбыз:

1. $\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{B\to\infty} \int_a^B f(x)dx$

2. $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty} \int_A^b f(x)dx$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \int_A^B f(x)dx$

4. Эгерде $f(x)$ функциясы $x = C$ чекитинде үзгүлтүктүү болсо, $(a < c < b)$ анда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

колдонулат.

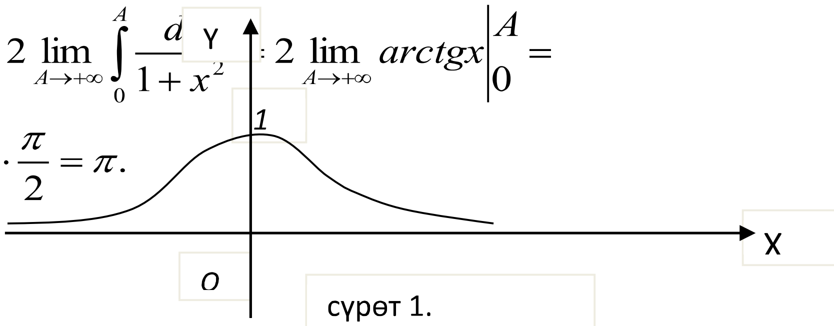
Мисал 1: $y = \frac{1}{1+x^2}$ ийри сызыгы жана анын асимптотасы менен чектелген аянтты тапкыла – бул Аньезиндин локону деп аталат [1].

Чыгаруу: Берилген функция $x \in (-\infty, +\infty)$ сандык окто үзгүлтүксүз. $\lim_{x\to\pm\infty} y = 0.$

Демек, Ox огу асимптотасы болот. Изделүүчү аянт төмөнкү өздүк эмес интегралга келет.

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = 2\lim_{A\to+\infty} arctgx \Big|_0^A =$$

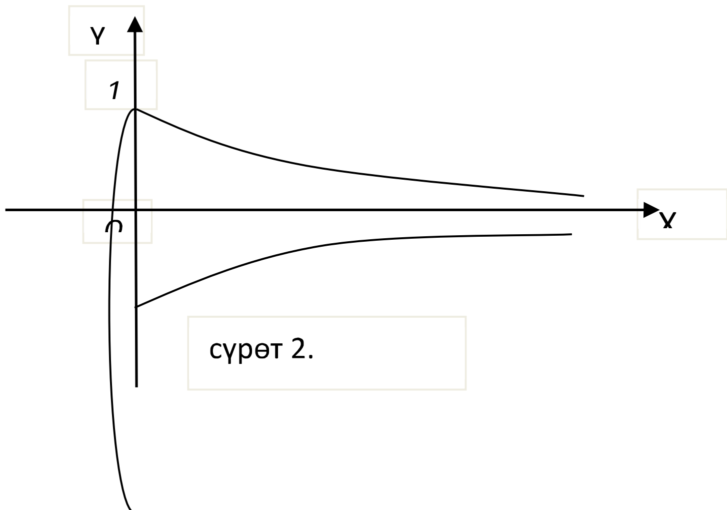
$$= 2(arctg\infty - arctg0) = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$



сүрөт 1.

Мисал 2: $y = e^{-x}$ функциясынын $x = 0, x = +\infty$ чегиндеги ийри сызыктын Ox огун айлануудан пайда болгон фигуранын бетинин аянтын тапкыла.

Чыгаруу: Айлануудан пайда болгон беттин аянты төмөнкү өздүк эмес интегралга барабар:



сүрөт 2.

$$S = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-x}\sqrt{1+e^{-2x}}\,dx$$

Бул интегралды чыгарыш үчүн төмөнкү ыкманы колдонобуз:

$$e^{-x} = t, \quad dt = -e^{-x}dx, \quad x = 0, \quad t = 1, \quad x = +\infty, \quad t = 0,$$

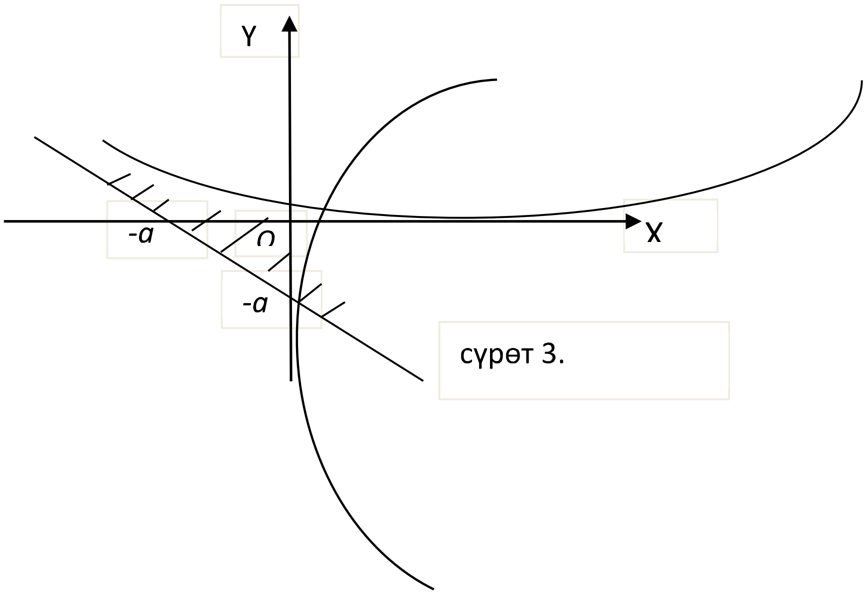
анда

$$S = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-x}\sqrt{1+e^{-2x}}\,dx = -2\pi\int_1^0 \sqrt{1+t^2}\,dt = 2\pi\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,dt =$$

$$= 2\pi\cdot\frac{1}{2}\left[t\sqrt{1+t^2} + \ln(t+\sqrt{1+t^2})\right]\Big|_0^1 = \pi\left[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right]$$

Мисал 3: Декарттын жалбырагынын аянтын тапкыла $x^3 + y^3 - 3axy = 0.$

Чыгаруу: Функция айкын эмес берилгендиктен полярдык координаталарды колдонобуз.



сүрөт 3.

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi$$

анда: $\rho^3\cos^3\varphi + \rho^3\sin^3\varphi - 3a\rho^2\cos\varphi\sin\varphi = 0$

$$\rho(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi) = 3a\sin\varphi\cos\varphi$$

$\rho = \dfrac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}$, мында $\varphi \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ болгондуктан

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 d\varphi = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}\,d\varphi.$$

Бул интегралды чыгарыш үчүн төмөнкү ыкманы колдонобуз:

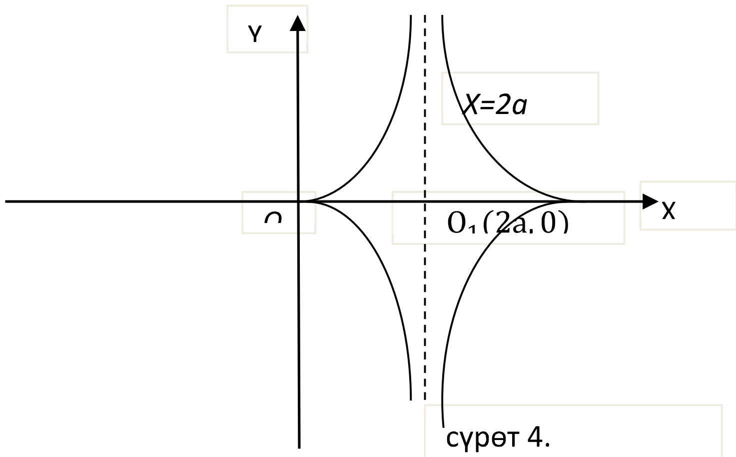
$$t = tg\varphi, \quad dt = \frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi, \quad \varphi = 0, \quad t = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad t = +\infty$$

$$S=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}d\varphi=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\cos^6\varphi(1+tg^3\varphi)^2}d\varphi=$$

$$=\frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}dt=\frac{9a^2}{2}\lim_{A\to\infty}\int_0^{A}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}dt=-\frac{3a^2}{2}\lim_{A\to\infty}\left[\frac{1}{1+t^3}\right]\Bigg|_0^A=\frac{3}{2}a^2.$$

Мисал 4: Циссоиданын $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$ өзүнүн асимптотасынын $x=2a$, айланасында айлануудан пайда болгон фигуранын көлөмүн тапкыла [4].

Чыгаруу: Бул маселени чыгарыш үчүн координата системасын өзгөртөбүз, б.а. координат башталышын $O_1(2a,0)$ чекитине көчүрөбүз. $x_1=x-2a,\quad y_1=y,$ анда циссоиданын теңдемеси төмөнкү түргө келет.



сүрөт 4.

$$y_1^2=\frac{(x_1+2a)^3}{-x_1}$$

O_1x_1 огунда айлануудан пайда болгон фигуранын көлөмү төмөнкү өздүк эмес интегралга барабар болот.

$$V=\pi\int_{-\infty}^{\infty}x_1^2dy_1=2\pi\int_0^{\infty}x_1^2dy.$$

Бул интегралды интегралдаш үчүн x_1 өзгөрмөлүү чоңдугуна өтөбүз

$$2y_1y_1^1=-\frac{3(x_1+2a)^2x_1-(x_1+2a)^3}{x_1^2}=-\frac{2(x_1+2a)^2(x_1-a)}{x_1^2}$$

$$y_1^1=-\frac{(x_1+2a)^2(x_1-a)}{x_1^2y_1}=-\frac{(x_1+2a)^2(x_1-a)}{x_1^2\cdot\sqrt{-\dfrac{(x_1+2a)^3}{x_1}}}=-\frac{(x_1+2a)(x_1-a)}{x_1^2\cdot\sqrt{-\dfrac{x_1+2a}{x_1}}}.$$

Анда:

$$V=-2\pi\int_{-2a}^{0}\frac{(x_1+2a)\ (x_1-a)}{\sqrt{-\frac{x_1+2a}{x_1}}}dx_1=\left|\begin{array}{l}\frac{x_1+2a}{x_1}=-t^2\\ x_1=-\frac{2a}{1+t^2}\\ dx_1=\frac{4at}{(1+t^2)^2}dt\\ x_1+2a=\frac{2at^2}{1+t^2},\, x_1=-2a, t=0\\ x_1=0, t=\infty\\ x_1-a=-\frac{3a+at^2}{1+t^2}\end{array}\right|=$$

$$=2\pi\int_0^{\infty}\frac{2at^2(3a+at^2)4atdt}{t(1+t^2)^4}=48a^3\pi\int_0^{\infty}\frac{t^2dt}{(1+t^2)^2}+16a^3\pi\int_0^{\infty}\frac{t^4dt}{(1+t^2)^4}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}t=tgz\\ dt=\sec^2 zdz\\ t=0,\ z=0,\\ t=\infty,\ z=\frac{\pi}{2}\end{array}\right|=48a^3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 z\cos^4 zdz+16a^3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 z\sin^4 zdz=$$

$$=48a^3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 zdz-48a^3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 zdz+16a^3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 zdz-16a^3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 zdz=$$

$$=64a^3\pi\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4}-64a^3\pi\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}=2\pi^2a^3.$$

Эскертүү: мында төмөнкү интегралдарды колдондук,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m xdx=\left|\begin{array}{l}\sin x=t\\ \cos xdx=dt\\ x=0, t=0\\ x=\frac{\pi}{2}, t=1\end{array}\right|=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}}\cos xdx=$$

$$=\int_0^1(1-t^2)^{\frac{m-1}{2}}dt=\frac{(m-1)!!}{m!!}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Демек, сабакта предмет аралык байланыштарды туура колдонуу студенттердин мобилдүүлүгүн өнүктүрүү жана дүйнө таанымын калыптандыруу аркылуу алардын окуу сапатын жогорулатууга мүмкүндүк берет.

Колдонулган адабияттар:

1. Асанова Ж.К. Математикалык анализ. Жумушчу дептер. -Б., 2018
2. Бөрүбаев А.А. Шабыкеев Б., Бараталиев К. Математикалык анализ. 2-бөлүк: Жогорку окуу жайлардын студенттери үчүн окуу китеби. - Б.: Мектеп, 2002.
3. Асанова Ж.К. Реализация межпредметных связей в процессе изучения факультативного курса по математическому анализу// Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2018. – № 6. – С. 169-174;
4. Кутанов А., Асанова Ж.К. Математикалык анализ. -Б.2019
5. Минькова Р.М. Математический анализ. Часть 1. / Р.М. Минькова. Екатеринбург: УГТУ УПИ, 2006. 80 с.

УДК: 378. 23
DOI 10.33514/BK-1694-7711-2023-2(1)-329-332

Байболотов Б. А., Кубатбекова А.К., Кубанычбекова Н.К.
К. Тыныстанов атындагы Ысык-Көл мамлекеттик университети, физика-математика илимдеринин кандидаты, доцент,
К. Тыныстанов атындагы Ысык-Көл мамлекеттик университети, магистрант,
К. Тыныстанов атындагы Ысык-Көл мамлекеттик университети, магистрант
Байболотов Б. А ., Кубатбекова А.К., Кубанычбекова Н. К.
Иссык-Кульский государственный университет им. К. Тыныстанова, кандидат физико-математических наук, доцент
Иссык-Кульский государственный университет им. К. Тыныстанова, магистрант
Иссык-Кульский государственный университет им. К. Тыныстанова, магистрант
Baybolotov B. A., Kubatbekova A. K., Kubanychbekova N.K.
K. Tynystanov Issyk-Kul State University, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
Issyk-Kul State University K. Tynystanov, Master’s student
Issyk-Kul State University K. Tynystanov, Master’s student

ГЕОМЕТРИЯЛЫК ТЕЛОЛОРДУН ИНТЕРАКТИВДҮҮ ЧӨЙРӨДӨ КЕСИЛИШИ
СЕЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ В ИНТЕРАКТИВНОЙ СРЕДЕ GEOGEBRA
SECTION OF GEOMETRIC BODIES IN GEOGEBRA INTERACTIVE ENVIRONMENT

Аннотация: Бул макалада геометриянын белгилүү бир бөлүмү үчүн Geogebra интерактивдүү чөйрөсүн колдонуу, ошондой эле геометрияны изилдөөдө Геогбранын эффективдүүлүгү талкууланат. Өз кезегинде бул чөйрөнү Кыргыз Республикасынын мектептеринде пайдалануу көйгөйлөрү изилденген, бул эң негизги мүдүрүлтпөөчү. Проблемалар: кадрларды адаптациялоо, материалдык ресурстардын жетишсиздиги.